

Formula Stokesovog teorema u $\mathbb{R}^3$

Analiza 4

Atif Degirmendžić

2025

Uvodne pretpostavke

Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ glatka dvostrana površ, parametrizirana sa $u, v \in D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemu je D kompaktna oblast uv -ravni.

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

Pretpostavimo da je rub ∂D po dijelovima glatka, pozitivni orijentisana kriva, zadana parametarskim jednačinama:

$$\partial D : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (2)$$

S obzirom da jednačine (1) daju bijektivno preslikavanje između D i S , i rub ∂D se bijektivno preslikava na ∂S , to slijedi da je rub ∂S kontura data sa jednačinama:

$$\partial S : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (3)$$

Odaberimo da je orijentacija od ∂S pozitivna, u odnosu na stranu površi S po kojoj integriramo.

Neka su $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ funkcije definisane na oblasti¹ $G \subset \mathbb{R}^3$, pri čemu G sadrži površ S . Pretpostavimo za ove funkcije da su neprekidne na G i da imaju na G sve parcijalne izvode, koji su neprekidne funkcije.

Od važnosti će nam biti još pretpostavka da su $x''_{uv}, y''_{uv}, z''_{uv}$ neprekidne funkcije, jer tada vrijedi jednakost mješovitih izvoda, tj. $x''_{uv} = x''_{vu}$ itd.

¹tj. otvorenom i povezanom skupu

Izvođenje Stokesove formule

Strategija

Formula iz Stokesovog teorema koja povezuje linijski integral druge vrste po rubu ∂S površi S , sa površinskim integralom druge vrste po površi S , glasi:

$$\int_{\partial S} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Krenućemo od lijeve strane ove jednakosti, s ciljem da dobijemo desnu stranu. Prvo ćemo se fokusirati na integral $\int_{\partial S} P dx$, za koji ćemo izvesti sljedeći niz prelazaka po objektima integracije:

$$\int_{\partial S} = \int_a^b = \int_{\partial D} \stackrel{G.T.}{=} \int_D = \int_S$$

Gdje G.T. znači da ćemo iskoristiti Greenov teorem. Potom ćemo slično, ali sažetije obrazloženo, uraditi za $\int_{\partial S} Q dy$ i $\int_{\partial S} R dz$. Na kraju ćemo sabrati sve dobijene jednakosti, koje će nam dati formulu Stokesovog teorema.

Izvođenje

Posmatrajmo prvo $\int_{\partial S} P dx$. Ako primijenimo parametrizaciju (3), dobijamo, $dx = (x'_u u'_t + x'_v v'_t) dt$. Neka je $n(t)$ vektor² $n(t) := (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P(x, y, z) dx &= \int_a^b P(n(t)) (x'_u u'_t + x'_v v'_t) dt \\ &= \int_a^b P(n(t)) x'_u u'_t dt + \int_a^b P(n(t)) x'_v v'_t dt \end{aligned}$$

Da bi nastavili od posljednje jednakosti, iskoristimo sada parametrizaciju (2), $du = u'_t dt$, $dv = v'_t dt$. Neka je $m(u, v)$ vektor $m(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Uvrštavajući du, dv u posljednju jednakost iznad, prelazimo sa integrala po intervalu na linijski integral u uv -ravni, i to po ∂D :

²formalni vektor funkcija

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} P dx &= \dots = \int_{\partial D} P(m(u, v)) x'_u du + P(m(u, v)) x'_v dv \\ &= \int_{\partial D} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (\star)\end{aligned}$$

Sada možemo primjeniti Greenov teorem na izraz $(\star)$:

$$\int_{\partial S} P dx = \int_{\partial D} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv \stackrel{G.T.}{=} \iint_D \left[\left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right)'_u - \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right)'_v \right] du dv \quad (\Delta)$$

Izračunajmo posebno izvode $\left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right)'_u$ i $\left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right)'_v$, koristeći lančano pravilo za izvode, činjenicu $P = P(x, y, z)$ i ovisnost varijabli x, y, z od varijabli u, v , prema parametrizaciji (1):

$$\left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right)'_u = P'_u \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

$$\left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right)'_v = P'_v \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$$

Primjetimo da $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$, jer smo u uvodu pretpostavili da su ovi izvodi neprekidni, što znači da će se ovi članovi poništiti kada u narednom koraku oduzmemo ove izraze.

Oduzmimo sada ove izraze, dobijamo:

$$\begin{aligned}\left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right)'_u - \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right)'_v &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\ &= \cancel{\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \cancel{\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right)\end{aligned}$$

Dobijene izraze u zagradama iznad možemo pisati u obliku determinanti, tj. jakobijana

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} &= \begin{vmatrix} x'_v & x'_u \\ y'_v & y'_u \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, u)} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} &= \begin{vmatrix} x'_v & x'_u \\ z'_v & z'_u \end{vmatrix} = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\end{aligned}$$

Nastavljajući niz jednakosti, dobijamo:

$$\left(P \frac{\partial x}{\partial v}\right)'_u - \left(P \frac{\partial x}{\partial u}\right)'_v = \dots = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, u)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Posljednju jednakost smo dobili tako što smo zamijenili kolone u jakobijanu $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v, u)}$, zbog čega se promijenio znak ispred determinante³.

Sada sve ovo možemo uvrstiti u (Δ) :

$$\int_{\partial S} P dx = \dots =^{G.T.} \iint_D \left[\left(P \frac{\partial x}{\partial v}\right)'_u - \left(P \frac{\partial x}{\partial u}\right)'_v \right] dudv = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv \quad (\circ)$$

Ako pogledamo niz jednakosti integrala u sekciji "Strategija", možemo vidjeti da nam je za slučaj $\int_{\partial S} P$ još samo ostalo da pređemo na integral po S . Shodno tome, posmatrajmo pojedinačno integrale

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial z} (m(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv, \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} (m(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv$$

Sada želimo da tvrdimo iduće:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial z} (m(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx \quad (\text{I})$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} (m(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (\text{II})$$

Međutim, za površinske integrale druge vrste mi općenito znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} \pm \iint_{D_1} M(m(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv &= \iint_{S_1} M(x, y, z) dz dx \\ \pm \iint_{D_1} N(m(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv &= \iint_{S_1} N(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

Pri čemu su M, N pogodno odabrane funkcije na nekoj oblasti koja sadrži površ S_1 , a koja je parametrizirana preko površi D_1 .

Ako uzmemo $M := \frac{\partial P}{\partial z}$, $N := \frac{\partial P}{\partial y}$, $D_1 := D$, $S_1 := S$, i odaberemo znak + na desnim stranama jednakosti iznad⁴ dobijamo što smo htjeli i pokazati.

Ako uvrstimo (I) i (II) u $(\circ)$, konačno možemo preći na integral po S :

$$\int_{\partial S} P dx = \dots = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1.1)$$

³ovo smo uradili da bi naštimali izraz na pogodan oblik

⁴što činimo jer smo odabrali pozitivnu orijentaciju krive ∂S

Uradimo sada isto za funkcije Q, R , pri čemu ćemo preskočiti neka objašnjenja jer je postupak potpuno analogan kao za funkciju P , tj. za integral $\int_{\partial S} P dx$.

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} Q(x, y, z) dy &= \int_a^b Q(n(t))(y'_u u'_t + y'_v v'_t) dt \\
 &= \int_a^b Q(n(t)) y'_u u'_t dt + Q(n(t)) y'_v v'_t dt \\
 &= \int_{\partial D} Q(m(u, v)) y'_u du + Q(m(u, v)) y'_v dv \\
 &= \int_{\partial D} Q \frac{\partial y}{\partial u} du + Q \frac{\partial y}{\partial v} dv \\
 &= \iint_D \left[\left(Q \frac{\partial y}{\partial v} \right)'_u - \left(Q \frac{\partial y}{\partial u} \right)'_v \right] dudv \\
 &= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right] dudv \\
 \int_{\partial S} Q(x, y, z) dy &= \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} R(x, y, z) dz &= \int_a^b R(n(t))(z'_u u'_t + z'_v v'_t) dt \\
 &= \int_a^b R(n(t)) z'_u u'_t dt + R(n(t)) z'_v v'_t dt \\
 &= \int_{\partial D} R(m(u, v)) z'_u du + R(m(u, v)) z'_v dv \\
 &= \int_{\partial D} R \frac{\partial z}{\partial u} du + R \frac{\partial z}{\partial v} dv \\
 &= \iint_D \left[\left(R \frac{\partial z}{\partial v} \right)'_u - \left(R \frac{\partial z}{\partial u} \right)'_v \right] dudv \\
 &= \iint_D \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] dudv \\
 \int_{\partial S} R(x, y, z) dz &= \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

Ako saberemo sada jednakosti (1.1), (1.2) i (1.3), dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (P dx + Q dy + R dz) &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Tj.

$$\int_{\partial S} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Što je upravo formula iz Stokesovog teorema.

□